Final Prop. 1.5.2 y Todo Prop. 1.5.4

Estudiante: Jorge Hevia Cofré

Universidad De La Frontera
Estudiante de Ingeniería Civil Matemática

27 de Mayo de 2025

Índice

1. Contenido
   - Preámbulo
   - Definiciones
     - Medida Externa
     - Medida Interna
   - Proposición 1.5.4
   - Demostración Prop. 1.5.4
2. Referencias

Usted debería notar que aún reemplazando un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ por su forma completa $(X, \mathscr{A}_\mu, \bar{\mu})$ habilita a uno evitar algunas dificultades, pero nos introduce a otras. Algunas de estas dificultades aparecen porque la σ-álgebra $\mathscr{A}_\mu$ en su forma completa es a menudo más complicada que la σ-álgebra original $\mathscr{A}$.

Usted debería notar que aún reemplazando un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ por su forma completa $(X, \mathscr{A}_\mu, \bar{\mu})$ habilita a uno evitar algunas dificultades, pero nos introduce a otras. Algunas de estas dificultades aparecen porque la σ-álgebra $\mathscr{A}_\mu$ en su forma completa es a menudo más complicada que la σ-álgebra original $\mathscr{A}$.
Otras son causadas por el hecho que para las medidas μ y v definidas en una σ-álgebra común $\mathscr{A}$, la forma completa de $\mathscr{A}_\mu$ y $\mathscr{A}_v$ de $\mathscr{A}$ bajo μ y v pueden no ser iguales.

Usted debería notar que aún reemplazando un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ por su forma completa $(X, \mathscr{A}_\mu, \bar{\mu})$ habilita a uno evitar algunas dificultades, pero nos introduce a otras. Algunas de estas dificultades aparecen porque la σ-álgebra $\mathscr{A}_\mu$ en su forma completa es a menudo más complicada que la σ-álgebra original $\mathscr{A}$.
Otras son causadas por el hecho que para las medidas μ y v definidas en una σ-álgebra común $\mathscr{A}$, la forma completa de $\mathscr{A}_\mu$ y $\mathscr{A}_v$ de $\mathscr{A}$ bajo μ y v pueden no ser iguales.
Porque esas complicaciones parecen prudentes siempre que sea posible evitar argumentos que dependan de la completitud; resulta que en las partes básicas de la teoría de medidas esto casi siempre se puede hacer.

Definiciones

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, sea μ la medida en $\mathscr{A}$. y sea A un subconjunto arbitrario de X. Entonces,

Definiciones

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, sea μ la medida en $\mathscr{A}$. y sea A un subconjunto arbitrario de X. Entonces,

Definición (Medida Externa)

$\mu^*(A)$, la Medida Externa de A, que esta definida por

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \text{ y } B \in \mathscr{A}\}, \tag{1}$$

Definiciones

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, sea μ la medida en $\mathscr{A}$. y sea A un subconjunto arbitrario de X. Entonces,

Definición (Medida Externa)

$\mu^*(A)$, la Medida Externa de A, que esta definida por

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \text{ y } B \in \mathscr{A}\}, \tag{1}$$

Definición (Medida Interna)

Y $\mu_*(A)$, la Medida Interna de A, que esta definida por

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A \text{ y } B \in \mathscr{A}\},$$

Definiciones

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, sea μ la medida en $\mathscr{A}$. y sea A un subconjunto arbitrario de X. Entonces,

Definición (Medida Externa)

$\mu^*(A)$, la Medida Externa de A, que esta definida por

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \text{ y } B \in \mathscr{A}\}, \tag{1}$$

Definición (Medida Interna)

Y $\mu_*(A)$, la Medida Interna de A, que esta definida por

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A \text{ y } B \in \mathscr{A}\},$$

Es fácil revisar que $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ se mantiene para cada subconjunto de A de X.

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA

Proposición 1.5.4

Proposición 1.5.4

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, y sea μ una medida sobre $(X, \mathscr{A})$. Luego, la función $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0. + \infty]$ definida por (1) es una medida externa (por lo definido en la sección 1.3) sobre X.

Demostración Proposición 1.5.4

Demostración escrita en la pizarra por Jorge Hevia.
Demostración obtenida en Measure Theory 2nd Edition [Cohn, 2013]

Demostración Proposición 1.5.4

Demostración escrita en la pizarra por Jorge Hevia.
Demostración obtenida en Measure Theory 2nd Edition [Cohn, 2013]

Proposición 1.2.4

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\{A_k\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos que pertenecen al $\mathscr{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Demostración Proposición 1.5.4

Demostración escrita en la pizarra por Jorge Hevia.
Demostración obtenida en Measure Theory 2nd Edition [Cohn, 2013]

Proposición 1.2.4

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\{A_k\}$ es una sucesión arbitraria de conjuntos que pertenecen al $\mathscr{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Note que la Proposición 1.4.11 puede ser reformulada.

¿Qué nos dice la Proposición 1.4.11?

¿Qué nos dice la Proposición 1.4.11?

Proposición 1.4.11

Existe un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que cada conjunto Lebesgue Medible que esta incluído en A o en A^c tiene una medida de Lebesgue cero.

¿Y cómo puede ser reformulada?

¿Y cómo puede ser reformulada?

Proposición 1.4.11 (reformulada)

Existe un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que $\lambda_*(A) = 0$ y $\lambda_*(A^c) = 0$.

Referencias I

Cohn, D. L. (2013).
Measure Theory.
Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser, New York, 2nd edition.

Muchas Gracias por su Atención

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA